ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2001, т. 232, с. 25–30

О работах С.М. Никольского по теории функциональных пространств и ее приложениям[1]

©2001 г. О. В. Бесов

С.М. Никольским в 1951 г. была опубликована фундаментальная работа [1], заложившая основу целому направлению исследований по теории функциональных пространств дифференцируемых функций и ее приложениям. Она содержала неравенства для целых функций конечных степеней

$$g_\nu(z) = g_\nu(z_1, \dots, z_n), \qquad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n):$$

$$\|g_\nu\|_{q,\mathbb{R}^n} \le 2^n \left(\prod_{j=1}^n \nu_j\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|g_\nu\|_{p,\mathbb{R}^n}, \qquad 1 \le p \le q \le \infty, \tag{1}$$

$$\|g_\nu\|_{p,\mathbb{R}^m} \le 2^n \left(\sum_{j=m+1}^n \nu_j\right)^{\frac{1}{p}} \|g_\nu\|_{p,\mathbb{R}^n}, \qquad 1 \le m < n, \tag{2}$$

где $\|\cdot\|_{p,\mathbb{R}^n}$, $\|\cdot\|_{p,\mathbb{R}^m}$ — лебеговы нормы на $\mathbb{R}^n$ и его подпространстве $\mathbb{R}^m = \{x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0\}$.

Эти неравенства наряду с доказанными им оценками производных

$$\|D^\alpha g_\nu\|_{p,\mathbb{R}^n} \le \nu^\alpha \|g_\nu\|_{p,\mathbb{R}^n}, \qquad 1 \le p < \infty, \tag{3}$$

обобщающими неравенство С.Н. Бернштейна для $p = \infty$, дали возможность Сергею Михайловичу связать аппроксимационные свойства функций из $L_p(\mathbb{R}^n)$ с их гладкостью в $L_p(\mathbb{R}^n)$ (включая гладкость дробного порядка) и применить результаты к исследованию введенных им пространств дифференцируемых функций H_p^r, нормированных следующим образом:

$$\|f\|_{H_p^r(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{p,\mathbb{R}^n} + \sup_{|h|>0} \frac{\|\triangle_h^k \nabla^{\overline{r}} f\|_{p,\mathbb{R}^n}}{|h|^{r-\overline{r}}}, \tag{4}$$

где $r > 0$, $\overline{r} \in \mathbb{N}_0$, $0 \le \overline{r} < r \le \overline{r} + 1$, $k \in \{1, 2\}$, $k > r - \overline{r}$, $\nabla^m f$ — градиент f порядка m, $\triangle_h^k f(x)$ — разность порядка k функции f в точке x с шагом $h \in \mathbb{R}^n$.

Сергей Михайлович доказал следующую теорему вложения:

$$H_p^r(\mathbb{R}^n) \subset H_q^\rho(\mathbb{R}^m), \qquad 1 \le p \le q \le \infty, \quad 1 \le m \le n, \quad r - \frac{n}{p} = \rho - \frac{m}{q}. \tag{5}$$

Эта теорема точна (неулучшаема ни по одному из параметров).

Случай $1 \le m < n$, $q = p$ показывает, что след на $\mathbb{R}^m$ функции из $H_p^r(\mathbb{R}^n)$ содержится в $H_p^\rho(\mathbb{R}^m)$, $\rho = r - \frac{n-m}{p} > 0$. Замечательно, что это утверждение обратимо, как было показано С.М. Никольским в 1951 г. [1] при решении более общей задачи о построении функции $f \in H_p^r(\mathbb{R}^n)$ с заданными следами на $\mathbb{R}^m$ самой функции и всех ее нормальных производных

[1] Доклад, прочитанный 3 мая 2000 г. на Международной конференции “Современные проблемы теории функций и функциональных пространств", посвященной 95-летию академика Сергея Михайловича Никольского (Москва).

до определенного порядка. Тем самым впервые была дана точная (обратимая) характеристика следа функции на многообразии меньшего числа измерений:

$$H_p^r(\mathbb{R}^n)|_{\mathbb{R}^m} = H_p^\rho(\mathbb{R}^m), \qquad \rho = r - \frac{n-m}{p} > 0. \tag{6}$$

Теоремы вложения для пространств функций многих действительных переменных были впервые установлены С.Л. Соболевым в конце 30-х годов для введенных им функциональных пространств

$$W_p^l(\mathbb{R}^n), \quad l \in \mathbb{N}, \qquad \|f|W_p^l(\mathbb{R}^n)\| = \sum_{|\alpha|\le l} \|D^\alpha f\|_{p,\mathbb{R}^n}.$$

Эти теоремы (вместе с дополнением В.П. Ильина) имеют вид

$$\begin{gathered} W_p^l(\mathbb{R}^n) \subset L_q(\mathbb{R}^m), \qquad 1 < p \le q \le \infty, \\ l - \frac{n}{p} + \frac{m}{q} \ge 0 \quad \text{при} \;\; q < \infty, \qquad l - \frac{n}{p} > 0 \quad \text{при} \;\; q = \infty. \end{gathered} \tag{7}$$

Вложение (7) неулучшаемо в терминах участвующих в его формулировке пространств Соболева и Лебега. Однако в теории вложения пространств Соболева оставались нерешенными некоторые важные вопросы. Так, например, в рамках этих пространств нельзя получить обращение теоремы о следах (которая дала бы возможность внутренним образом охарактеризовать следы функций из пространства Соболева на подпространстве).

Работы Сергея Михайловича явились важнейшим этапом в развитии теории вложения функциональных пространств дифференцируемых функций, определившим на десятилетия направление ее развития. Значение построенной Сергеем Михайловичем теории функциональных пространств, если говорить коротко, состояло в следующем.

1. Широко вовлечены в рассмотрение пространства не только целой, но и дробной гладкости — важная для приложений детализация характеристики функций.

2. Построенные пространства $H_p^l(\mathbb{R}^n)$ при целых l сколь угодно близки к пространствам Соболева:

$$H_p^{l+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \subset W_p^l(\mathbb{R}^n) \subset H_p^l(\mathbb{R}^n) \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

3. Впервые получено обращение теоремы о следах.

4. Система $\{H_p^r(\mathbb{R}^n)\}$ замкнута относительно теорем вложения и обратных теорем о продолжении функций.

5. Теория вложения охватывает анизотропные пространства дифференцируемых функций

$$H_{\mathbf{p}}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^n), \qquad \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n), \quad r_i > 0, \quad \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), \quad p_i \in [1, \infty].$$

Для описания результатов С.М. Никольского по анизотропным пространствам дифференцируемых функций многих переменных введем некоторые обозначения. Обозначим через

$$\triangle_{i,h}^k f(x), \qquad i \in \{1, \dots, n\}, \quad h \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N},$$

разность с шагом h порядка k функции f в точке x, взятую по переменной x_i. Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in [1, \infty]^n$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in (0, \infty)^n$.

Пространством $H^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n)$ называется банахово пространство определенных на $\mathbb{R}^n$ функций f с конечной нормой

$$\|f|H^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n)\| = \sum_{i=1}^{n}\left(\|f|L_{p_i}(\mathbb{R}^n)\| + \sup_{|h|>0}|h|^{\overline{r}_i - r_i}\left\|\triangle^{k_i}_{i,h}\frac{\partial^{\overline{r}_i}}{\partial x_i^{\overline{r}_i}}f \;\Big|\; L_{p_i}(\mathbb{R}^n)\right\|\right), \tag{8}$$

где $\overline{r}_i \in \mathbb{N}_0,\ 0 \le \overline{r}_i < r_i \le \overline{r}_i + 1,\ k_i \in \{1,2\},\ k_i > r_i - \overline{r}_i$.

В случае одинаковых p_i $(p_1 = \ldots = p_n = p)$ вместо $H^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n)$ пишут $H^{\mathbf{r}}_{p}(\mathbb{R}^n)$, а если еще и $r_1 = \ldots = r_n = r$, то пишут $H^{r}_{p}(\mathbb{R}^n)$. В последнем случае в норме (8) участвуют лишь несмешанные производные функции f и разности, взятые в координатных направлениях. Однако в этом случае норма (8) эквивалентна норме (4) в силу доказанной С.М. Никольским теоремы о свойствах смешанных производных от функций из пространства $H^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n)$, которая при $p_1 = \ldots = p_n = p$ утверждает, что всякая функция $f \in H^{\mathbf{r}}_{p}(\mathbb{R}^n)$ имеет на $\mathbb{R}^n$ производную $D^\alpha f$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, если

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{r_i} < 1,$$

и при этом справедлива оценка

$$\|D^\alpha f|H^{\boldsymbol{\rho}}_{p}(\mathbb{R}^n)\| \le C\|f|H^{\mathbf{r}}_{p}(\mathbb{R}^n)\|, \tag{9}$$

где

$$\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_n) \in (0,\infty)^n, \qquad \rho_j = r_j\left(1 - \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{r_i}\right),$$

а постоянная C не зависит от f.

Оценка (9) была установлена и для функций из $H^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n)$ и являлась первой общей теоремой интерполяционного характера для дифференцируемых функций многих переменных, когда “промежуточные"свойства функции индуцируются другими ее дифференциальными свойствами разных порядков, описанными в разных L_p-метриках.

С.М. Никольский установил общую теорему о вложении $H^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n) \subset H^{\boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{q}}(\mathbb{R}^m)$, которая в случае $p_1 = \ldots = p_n = p$, $q_1 = \ldots = q_m = q$ утверждает, что при

$$1 \le m \le n, \quad 1 \le p \le q \le \infty, \quad \kappa = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i} - \frac{1}{p}\sum_{i=m+1}^{n}\frac{1}{r_i} > 0$$

имеет место вложение

$$H^{\mathbf{r}}_{p}(\mathbb{R}^n) \subset H^{\kappa\mathbf{r}^{(m)}}_{q}(\mathbb{R}^m), \tag{10}$$

где $\mathbf{r}^{(m)} = (r_1, \ldots, r_m)$ — проекция $\mathbf{r}$ на $\mathbb{R}^m$.

Им было получено и обращение теоремы (10) в случае $1 \le m < n$, $p = q$, дающее точную (обратимую) характеристику следа функции $f \in H^{\mathbf{r}}_{p}(\mathbb{R}^n)$ на $\mathbb{R}^m$ (обобщение на анизотропный случай соотношения (6)).

Сергеем Михайловичем были найдены условия компактности множеств в пространстве $H^{\mathbf{r}}_{p}(\mathbb{R}^n)$.

Свои результаты Сергей Михайлович распространил на случай пространств $H^{r}_{p}(G)$, заданных на области $G \subset \mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей ∂G [2]. При этом норма в $H^{r}_{p}(G)$ имеет вид

$$\|f\|_{H^r_p(G)} = \|f\|_{p,G} + \sup_{h\in\mathbb{R}^n,\ 0<|h|<\delta}\frac{\|\triangle^k_h \nabla^{\overline{r}} f\|_{p,G_{k\delta}}}{|h|^{r-\overline{r}}},$$

где, как и в (4),

$$r > 0, \quad \overline{r} \in \mathbb{N}_0, \quad 0 \le \overline{r} < r \le \overline{r} + 1, \quad k \in \{1, 2\}, \quad k > r - \overline{r},$$

$\delta > 0$ достаточно мало, $G_\delta = \{x\colon \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \backslash G) > \delta\}$.

Он построил линейный непрерывный оператор продолжения

$$H_p^r(G) \to H_p^r(\mathbb{R}^n), \tag{11}$$

что дало возможность применить к пространствам $H_p^r(G)$ развитую уже теорию пространств $H_p^r(\mathbb{R}^n)$.

Сергеем Михайловичем найдена точная (обратимая) характеристика следов функций из $H_p^r(G)$ на достаточно гладкой границе ∂G [2]:

$$H_p^r(G)|_{\partial G} = H_p^\rho(\partial G). \tag{12}$$

Им найдена точная (обратимая) характеристика следов функций $H_p^r(G)$ на границе плоской области G, имеющей угловые точки.

Результаты Сергея Михайловича по теории функциональных пространств содержатся в монографиях [3, 4].

Свои результаты по теории функциональных пространств Сергей Михайлович применил к уравнениям математической физики и прежде всего к вариационному методу решения задач.

Он впервые установил в терминах граничных данных достаточные условия разрешимости, отличающиеся по гладкости от необходимых “на сколь угодно малое $\varepsilon > 0$". Например, для разрешимости вариационным методом краевой задачи для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{на } G, \\ u|_{\partial G} = \phi, \end{cases}$$

где область $G \subset \mathbb{R}^n$ имеет достаточно гладкую границу ∂G, необходимо, чтобы $\phi \in H_2^{\frac{1}{2}}(\partial G)$, и достаточно, чтобы $\phi \in H_2^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\partial G)$.

Отдельный цикл работ Сергея Михайловича 1957–1959 гг. посвящен решению вариационным методом задачи Гильберта (о нахождении гармонической вне ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$ функции с определенными условиями). Примененный им вариационный метод позволил провести исследование в многомерном случае ($n \ge 2$), в то время как используемая ранее теория интеграла Коши действовала лишь при $n = 2$.

Сергей Михайлович изучил пространства функций с доминирующей смешанной производной $S_p^r H$. В таких пространствах свойства некоторых смешанных производных играют определяющую роль. Он установил для этих пространств теоремы вложения и другие свойства и применил эти исследования к доказательству существования и к изучению свойств решения первой краевой задачи для уравнения

$$\sum_{k,l \in E} (-1)^{|l|} (a_{kl}(x) u^{(k)}(x))^{(l)} = 0,$$

где множество E мультииндексов выпукло и содержит все проекции каждого из своих мультииндексов. При этом предполагалось выполненным условие

$$\int\limits_G \sum_{k,l \in E} a_{kl}(x) f^{(k)}(x) f^{(l)}(x) dx \ge \kappa \int\limits_G \sum_{k=1}^N (f^{(k^s)}(x))^2 dx,$$

где выпуклая оболочка множества $\{0\} \cup \{k^s\}_1^N$ совпадает с E. Класс таких уравнений выходит за рамки гипоэллиптических.

Весовым пространствам и их приложениям к вырождающимся эллиптическим уравнениям посвящен цикл работ С.М. Никольского и П.И. Лизоркина, начатых в 1964 г. Существенную роль при этом играет неравенство

$$\|f\|_{L_p(G)} \le C \left(\sum_{j=0}^{s-1} \left\| \frac{\partial^j f}{\partial \nu^j} \right\|_{L_p(\partial G)} + \sum_{|k|=r} \|\rho^\lambda f^{(k)}\|_{L_p(G)} \right).$$

Здесь область $G \subset \mathbb{R}^n$, $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial G)$, ν — нормаль на ∂G, $\frac{r}{2} \le s \le r$, $r - \frac{1}{p} - \lambda < s < r - \frac{1}{p} - \lambda + 1$.

После доказательства этого неравенства для отрезка Сергеем Михайловичем был предложен так называемый метод мостов, позволяющий получить это неравенство для области.

С.М. Никольский и П.И. Лизоркин применили эти результаты к сильно вырождающемуся эллиптическому уравнению порядка $2r$

$$\begin{cases} Lu = F \quad \text{на } G, \\ \left.\dfrac{\partial u^j}{\partial \nu^j}\right|_{\partial G} = \phi_j, \quad j = 0, 1, \dots, s-1, \end{cases}$$

где

$$Lu = \sum_{|k|,|l| \le r} (-1)^{|k|} (a_{kl}(x) u^{(l)}(x))^{(k)}, \qquad a_{kl} = a_{lk},$$
$$\sum_{|k|,|l| \le r} a_{kl}(x) \xi_k \xi_l \ge \frac{\kappa}{\rho(x)^{2\lambda}} \sum_{|k|=r} \xi_k^2 \qquad \forall \xi_k.$$

При сильном вырождении ($\lambda < -\frac{1}{2} \Rightarrow s < r$) число граничных условий меньше r на всей границе, что отличает постановку этой задачи от классической.

Цикл работ Сергея Михайловича 1991–1999 гг. посвящен приближениям функций на многообразиях тригонометрическими полиномами, целыми функциями, алгебраическими многочленами. Общие теоремы о приближении установлены им для многообразий $\Gamma = \Gamma^{(m)} \subset \mathbb{R}^n$, $1 \le m \le n$, для которых имеются теоремы о продолжении функций пространства $H_p^r(\Gamma)$ до функций пространства $H_p^\rho(\mathbb{R}^n)$, $\rho = r + \frac{n-m}{p}$.

Отметим, например, теорему о приближении функции алгебраическими многочленами:

$$f \in H_p^r(\Gamma)$$

эквивалентно существованию последовательности многочленов $\{P_N\}_1^\infty$, удовлетворяющих следующим двум условиям:

$$\|f - P_N\|_{L_p(\Gamma)} \le CN^{-r}, \tag{$*$}$$
$$\|P_N\|_{H_p^r(\Gamma)} \le C. \tag{$**$}$$

Она содержит новую постановку вопроса и законченный результат. Новым здесь сравнительно с классической постановкой (Джексон, Бернштейн, Валле Пуссен) является условие ($**$). Следует заметить, что при классической постановке вопроса, т.е. при замене условия ($**$) на условие

$$\|P_N\|_{L_p(\Gamma)} \le C, \tag{$***$}$$

теорема перестает быть верной даже для интервала $\Gamma = (0,1) \subset \mathbb{R}^1$, когда условия $(*)$, $(***)$ влекут $f \in H_p^{\frac{r}{2}}(\Gamma)$, но не влекут $f \in H_p^{\frac{r}{2}+\varepsilon}(\Gamma)$ ни при каком $\varepsilon > 0$.

Наряду с этим Сергеем Михайловичем описаны те многообразия Γ, для которых условия $(*)$, $(***)$ влекут $f \in H_p^r(\Gamma)$.

Публикация Сергея Михайловича 1999 г. посвящена краевой задаче для многочленов для самосопряженного эллиптического дифференциального оператора порядка $2l$

$$\begin{cases} Lu = 0 \quad \text{на } G \subset \mathbb{R}^n, \\ \left.\dfrac{\partial^m u}{\partial \nu^m}\right|_{\partial G} = \left.\dfrac{\partial^m P}{\partial \nu^m}\right|_{\partial G}, \quad m = 0, 1, \ldots, l-1, \end{cases}$$

где P — многочлен.

Показано, что если ∂G — сфера или эллипсоид, то решением является многочлен той же степени, что и P, и что это не так, если ∂G — алгебраическая поверхность порядка $2s > 2$. Полученные в этой задаче результаты можно рассматривать и как обобщение основной теоремы для сферических функций (в последней $L = \Delta$, $l = 1$, ∂G — сфера).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН. 1951. Т. 38. С. 244–278.
2. *Никольский С.М.* Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях // Мат. сб. 1953. Т. 33, №2. С. 261–326.
3. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969; 2-е изд., 1977.
4. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975; 2-е изд., 1996.